

Pembinaan Permukaan Tertutup Licin oleh Fungsi Ball pada Kubus (Construction of Smooth Closed Surfaces by Ball Functions on a Cube)

DIANA SIRMAYUNIE MOHD NASIR* & ABD RAHNI MT PIAH*

ABSTRAK

Dalam Reka Bentuk Geometri Dibantu Komputer (CAGD), pembinaan permukaan secara asasnya dibentuk daripada koleksi tampalan permukaan, dengan syarat kesinjaran tertentu diletakkan di antara tampalan bersebelahan. Sungguhpun pada masa ini tampalan Bézier hasil darab tensor digunakan secara meluas dalam kebanyakan sistem CAGD untuk memodel permukaan bentuk bebas, kaedah ini hanya boleh digunakan untuk memodel permukaan tertutup bergenus satu, iaitu permukaan yang setara dengan suatu torus. Permukaan dengan kesinjaran satah tangen dikenali sebagai permukaan licin secara geometri peringkat satu atau permukaan G^1 . Makalah ini mengemukakan satu kaedah pembinaan permukaan G^1 yang mudah, iaitu permukaan bergenus sifar, dengan menakrif fungsi bikubik Ball pada muka kubus. Fungsi asas yang dibina mempunyai sokongan yang kecil dan hasil tambah fungsi asas adalah satu. Fungsi ini berguna untuk mereka bentuk, mencari hampiran dan menginterpolasi permukaan tertutup mudah yang genusnya adalah sifar. Kaedah pembinaan sebegini mula diperkenalkan oleh Goodman pada tahun 1991 yang telah menakrif fungsi splin-B teritlak bikuadratik pada mesy sisi empat mudah. Beberapa contoh permukaan/objek yang dihasilkan melalui kaedah pembinaan yang dikemukakan dipapar dalam makalah ini.

Kata kunci: Fungsi Ball; interpolasi; kesinjaran geometri; penghampiran; permukaan tertutup

ABSTRACT

In Computer Aided Geometric Design (CAGD), surface constructions are basically formed from collections of surface patches, by placing a certain continuity condition between adjacent patches. Even though tensor product Bézier patches are currently used extensively in most CAGD systems to model free-form surfaces, this method can only be used to generate closed surface of genus one, i.e. a surface which is equivalent to a torus. A surface with tangent plane continuity is known as a first order geometrically smooth surface or a G^1 surface. This paper presents a simple G^1 surface construction method, i.e. a surface of genus zero, by defining Ball bicubic functions on faces of a cube. The constructed basis functions have small support and sum to one. The functions are useful for designing, approximating and interpolating a simple closed surface of genus zero. This construction method was first introduced by Goodman in 1991 who defined biquadratic generalised B-spline functions on faces of a simple quadrilateral mesh. Several examples of surfaces/objects which are constructed by the proposed method are presented in this paper.

Keywords: Approximation; Ball function; closed surface; geometric continuity; interpolation

PENGENALAN

Ball (1974, 1975, 1977), telah menggunakan asas Ball kubik untuk menakrif CONSURF, satu pengaturcaraan permukaan teraik yang dibina olehnya di British Aircraft Corporation (Warton). Seterusnya, fungsi asas tersebut telah diitlak kepada polinomial darjah lebih tinggi masing-masingnya, oleh Wang (1987) dan Said (1989). Said (1990) juga telah memperkenalkan fungsi kubik jenis Bézier-Ball untuk permukaan. Pengitlakan yang telah dilaksanakan oleh Wang (1987) dan Said (1989) menghasilkan lengkung (permukaan) yang dikenali pada masa ini masing-masingnya, sebagai lengkung (permukaan) Wang-Ball dan lengkung (permukaan) Said-Ball. Goodman & Said (1991a, 1991b) telah menunjukkan penggunaan lengkung dan permukaan Said-Ball. Goodman (1991) telah memperkenalkan satu kaedah yang tidak

mengikut kelaziman dalam pembinaan permukaan tertutup licin dengan menakrif fungsi splin-B teritlak bikuadratik pada muka mesy sisi empat mudah, secara khusus dan mesy polihedron tertutup, secara amnya. Domain fungsi yang dibentuk oleh Goodman (1991) adalah pada muka sisi empat pepejal nalar (seperti kubus) dan tidak pada satah, sebagaimana yang dilakukan secara kebiasaannya. Makalah ini mengemukakan satu kaedah pembinaan permukaan licin secara geometri peringkat satu atau permukaan G^1 yang mudah, iaitu permukaan dengan genus satu, dengan menakrif fungsi bikubik Ball pada muka kubus. Melalui pendekatan ini, pengarang akan hanya mempertimbang kes kubik kerana kes ini adalah kes darjah terendah untuk fungsi asas Ball. Fungsi asas tak negatif yang dibina mempunyai sokongan kecil dengan hasil tambah fungsi adalah satu (dengan demikian, memenuhi

syarat hul cembung untuk tujuan pembinaan permukaan tertutup).

FUNGSI ASAS BALL PADA KUBUS

Andaikan W satu kubus. Suatu fungsi dalam ruang vektor $V(W)$ bertepatan dengan polinomial $E(u, v)$ pada muka $\{(u, v): 0 \leq u, v \leq 1\}$ dan bertepatan dengan polinomial $F(u, v)$ pada muka bersebelahan $\{(u, v): 0 \leq u, v \leq 1\}$, iaitu:

$$E(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 p_{ij} m_i(u) m_j(v),$$

dengan $u, v \in [0, 1] \times [0, 1]$,
dan

$$F(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 q_{ij} m_i(u) m_j(v),$$

dengan $u, v \in [0, 1] \times [0, 1]$,

p_{ij} dan q_{ij} adalah pekali Ball dan $m_i, i = 0, 1, 2, 3$ adalah fungsi asas Ball,

$$m_0(u) = (1-u)^2, m_1(u) = 2u(1-u)^2, m_2(u) = 2u^2(1-u)$$

dan

$$m_3(u) = u^2, \quad (3)$$

yang akan digunakan untuk tujuan menjana sesuatu permukaan tertutup. Pada sisi sepunya $(u, 0), 0 \leq u \leq 1$, $E(u, 0) = F(u, 0)$. Kita ingin supaya syarat G^1 .

$$\frac{\partial E}{\partial v}(t, 0) = k(t) \frac{\partial F}{\partial v}(t, 0) + l(t) \frac{\partial E}{\partial u}(t, 0), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (4)$$

dipenuhi, untuk sebarang fungsi $k(t)$ dan $l(t)$, dengan $k(t) > 0$. Untuk mengimbangi darjah t di sebelah kanan dan kiri dalam (4), kita perlukan $k(t)$ sebagai fungsi malar dan $l(t)$ sebagai fungsi linear. Untuk tujuan memudahkan pengiraan, kita pilih $k(t) = l$ dan $l(t) = A(1-t) + Bt$, dengan

A dan B adalah pemalar. Untuk membina permukaan yang dijana daripada poligon kawalan yang mempunyai bucu-bucu yang berdekatan di antara satu sama lain, kita pilih $A = 1$ dan $B = -1$ supaya $l(0) = 1$ dan $l(1) = -1$. Dengan demikian,

$$l(t) = 1 - 2t \text{ dan } k(t) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (5)$$

Pada sebarang muka $\{(u, v): 0 \leq u, v \leq 1\}$ dengan menggantikan (5) ke dalam (4) dan seterusnya membandingkan pekali persamaan tersebut dengan menggunakan tatatanda seperti yang terdapat dalam Rajah 1, kajian memperoleh:

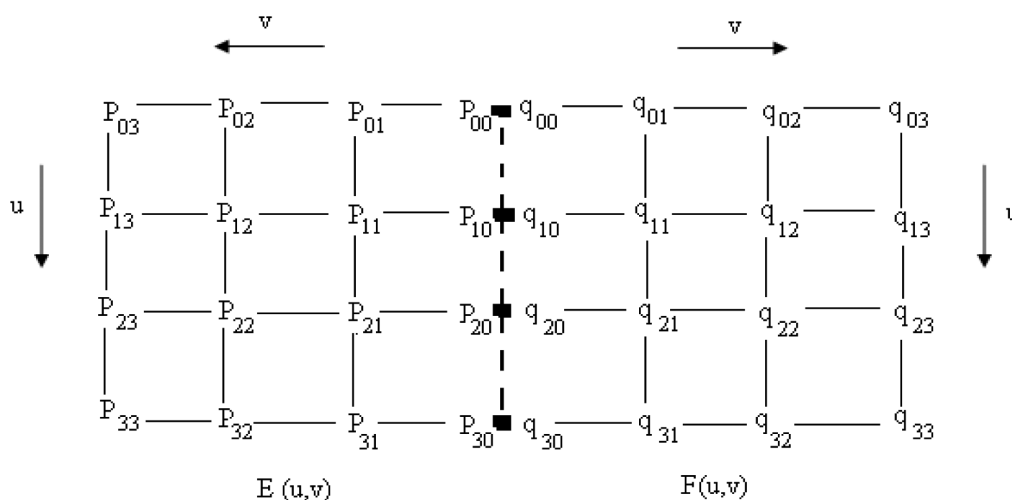
$$p_{00} = q_{00}, p_{10} = q_{10}, p_{20} = q_{20} \text{ dan } p_{30} = q_{30}, \quad (6)$$

serta

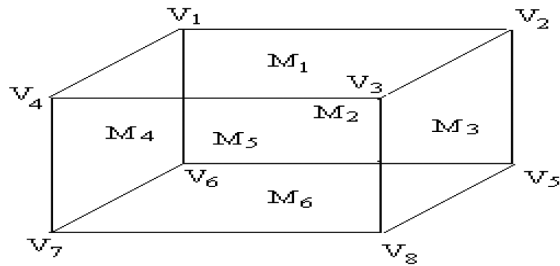
$$\left. \begin{aligned} 3p_{00} &= p_{10} + p_{01} + q_{01} \\ 8p_{10} &= p_{00} + 2q_{11} + 2p_{11} + 2p_{20} + p_{30} \\ 8p_{20} &= p_{30} + 2q_{21} + 2p_{21} + 2p_{10} + p_{00} \\ 3p_{30} &= p_{20} + p_{31} + q_{31} \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

PEMBINAAN FUNGSI BALL YANG DITAKRIF PADA KUBUS

Dengan menggunakan kaedah yang sama seperti yang dikemukakan oleh Goodman (1991), pembinaan fungsi bikubik Ball $B_i, i = 1, 2, \dots, 8$ ditakrif pada suatu pepejal yang setara dengan bentuk kubus, W . Andaikan $M_j, j = 1, 2, \dots, 6$ mewakili muka kubus seperti dalam Rajah 2. Fungsi Ball $B_i: W \rightarrow R^3$ dibina dengan keadaan B_i sebagai fungsi bikubik pada setiap muka dan memenuhi syarat G^1 apabila merentasi sisi sepunya muka kubus bersebelahan. Kaedah Goodman (1991) menggunakan 6 titik kawalan (titik tengah muka kubus), tetapi kaedah yang dikemukakan dalam makalah ini menggunakan lapan titik kawalan V_i ,



RAJAH 1. Pekali Ball pada dua muka kubus yang bersebelahan



RAJAH 2. Titik kawalan dan muka kubus

$i = 1, 2, \dots, 8$, (bucu kubus), sama seperti kaedah Piah & Saaban (1999) untuk menjana permukaan tertutup Ball

$$s(u, v) = \sum_{i=1}^8 V_i B_i(u, v). \quad (8)$$

B_i perlu memenuhi sifat kesaan (unity) dan sifat kepositifan, iaitu $B_i > 0$ dan $\sum_{i=1}^8 B_i(u, v) = 1$ untuk $i = 1, 2, \dots, 8$ dan $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$ Rajah 3 menunjukkan pekali Ball pada kubus.

Pekali-pekali Ball untuk fungsi yang ditakrif dalam persamaan (8) akan diwakili oleh matriks paduan,

$$A = \begin{pmatrix} a & a & b & B & a & g & h & c & b & h & i & d & B & c & d & C \\ B & c & d & C & b & h & i & d & a & g & h & c & a & a & b & B \\ C & d & c & B & d & i & h & b & c & h & g & a & B & b & a & a \\ B & b & a & a & c & h & g & a & d & i & h & b & C & d & c & B \\ C & e & f & f & d & k & l & f & c & j & k & e & B & c & d & C \\ B & c & d & C & c & j & k & e & d & k & l & f & C & e & f & f \\ C & d & c & B & e & k & j & c & f & l & k & d & f & f & e & C \\ f & f & e & C & f & l & k & d & e & k & j & c & C & d & c & B \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Kedudukan pekali Ball diumpukkan secara simetri terhadap sesuatu bucu. Untuk menjana permukaan, kita tulis persamaan (1) (begitu juga (2)) dalam bentuk matriks,

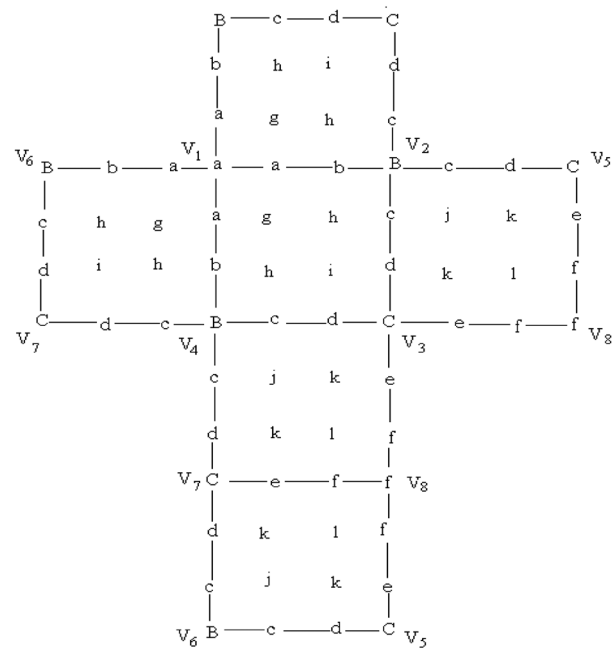
$$E(u, v) = (p_{00} \ p_{01} \ p_{02} \ p_{03} \ p_{10} \ p_{11} \ p_{12} \ p_{13} \ p_{20} \ p_{21} \ p_{22} \ p_{23} \ p_{30} \ p_{31} \ p_{32} \ p_{33})Q, \quad (10)$$

untuk $(u, v) \in M_j, j = 1, 2, \dots, 6$ dan Q ialah vektor lajur (16×1)

$$(m_0^3(u)m_0^3(v) \ m_0^3(u)m_1^3(v) \ m_0^3(u)m_2^3(v) \ m_0^3(u)m_3^3(v) \dots m_3^3(u)m_3^3(v))^T. \quad (11)$$

Pekali Ball disusun mengikut tertib vektor baris (1×16) , iaitu

$$(p_{00} \ p_{01} \ p_{02} \ p_{03} \ p_{10} \ p_{11} \ p_{12} \ p_{13} \ p_{20} \ p_{21} \ p_{22} \ p_{23} \ p_{30} \ p_{31} \ p_{32} \ p_{33}). \quad (12)$$



RAJAH 3. Pekali Ball pada kubus

Fungsi B_j mempunyai sokongan pada muka $M_j, j = 1, 2, \dots, 6$. Sebagai contoh, dengan menggunakan tatatanda pekali Ball yang terdapat dalam Rajah 3, fungsi B_1 dalam bentuk (9) boleh ditulis dalam bentuk matriks,

$$B_1(u, v) = \begin{cases} (a \ a \ b \ B \ a \ g \ h \ c \ b \ h \ i \ d \ B \ c \ d \ C)Q \in M_1 \\ (a \ a \ b \ B \ a \ g \ h \ c \ b \ h \ i \ d \ B \ c \ d \ C)Q \in M_2 \\ (C \ d \ c \ B \ e \ k \ j \ c \ f \ l \ k \ d \ f \ f \ e \ C)Q \in M_3 \\ (a \ a \ b \ B \ a \ g \ h \ c \ b \ h \ i \ d \ B \ c \ d \ C)Q \in M_4 \\ (C \ e \ f \ f \ d \ k \ l \ f \ c \ j \ k \ e \ B \ c \ d \ C)Q \in M_5 \\ (C \ e \ f \ f \ d \ k \ l \ f \ c \ j \ k \ e \ B \ c \ d \ C)Q \in M_6 \end{cases} \quad (13)$$

Jika syarat (6) dan (7) ke atas pekali Ball dipenuhi, diperoleh:

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{1}{5}(25a - 16g - 4h) \\ b &= \frac{1}{5}(5a - 2g + 2h) \\ c &= \frac{1}{5}(35a - 23g - 7h) \\ C &= \frac{1}{15}(-80a - 5f + 48g + 12h + 5) \\ e &= \frac{1}{240}(-2410a - 70f + 1476g + 384h - 60i + 115) \\ d &= \frac{1}{480}(-1430a - 170f + 828g + 192h + 60i + 125) \\ j &= \frac{1}{8}(-150a - 10f + 92g + 24h - 4i + 7) \\ k &= \frac{1}{8}(-150a - 10f + 92g + 24h - 4i + 7) \\ l &= \frac{1}{96}(610a + 190f - 372g - 96h + 12i - 31) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Syarat hul cembung dipenuhi jika:

$$\left. \begin{array}{l} a + 3B + 3C + f = 1 \\ \text{dan} \\ g + 2h + i + j + 2k + l = 1. \end{array} \right\} \quad (15)$$

Persamaan (14) dan (15) ditulis dalam sebutan parameter bebas. Untuk tujuan membina fungsi asas yang positif, memenuhi syarat hul cembung dan mempunyai sokongan yang kecil, parameter bebas yang dipilih pengarang untuk makalah ini ialah a, g, h, i dan f . Seterusnya, permukaan dijana dengan menukar titik-titik kawalan dalam (8) kepada titik-titik Ball menggunakan matriks paduan A dalam (9).

PENJANAAN PERMUKAAN OLEH FUNGSI BIKUBIK BALL

Titik-titik Ball, $D^n, n = 1, 2, \dots, 6$ diwakilkan dalam bentuk matriks berperingkat (3×6) dengan barisnya masing-masing mewakili koordinat (x, y, z) , manakala lajurnya mewakili pekali Ball mengikut tertib seperti dalam (13). Oleh sebab itu, D^n boleh dihubungkan dengan matriks titik kawalan, T^n dan matriks paduan A yang menghasilkan satu permukaan hasil darab tensor,

$$D^n = T^n A \text{ untuk } n = 1, 2, \dots, 6 \quad (16)$$

Untuk menjana permukaan secara muka demi muka, susunan titik kawalan yang digunakan mestilah mengikut tertib. Sebagai contoh, untuk muka 1 sehingga muka 6, tertib titik kawalan yang perlu digunakan masing-masingnya ialah

$$T^1 = (V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4 \ V_7 \ V_6 \ V_5 \ V_8), \quad T^2 = (V_1 \ V_6 \ V_7 \ V_4 \ V_3 \ V_2 \ V_5 \ V_8).$$

$$T^3 = (V_7 \ V_8 \ V_3 \ V_4 \ V_1 \ V_6 \ V_5 \ V_2), \quad T^4 = (V_1 \ V_2 \ V_5 \ V_6 \ V_7 \ V_4 \ V_3 \ V_8).$$

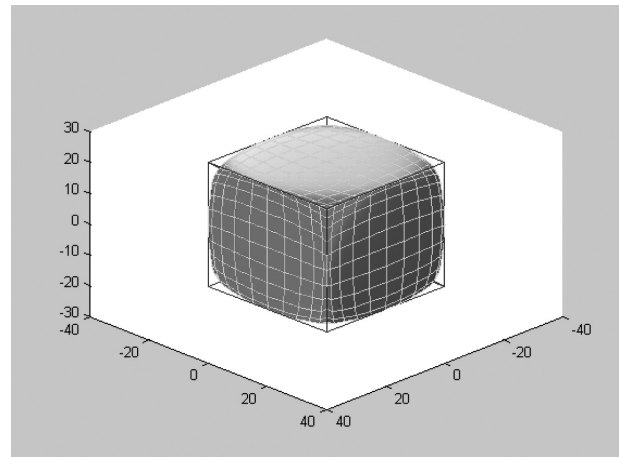
$$T^5 = (V_5 \ V_2 \ V_3 \ V_8 \ V_7 \ V_6 \ V_1 \ V_4), \quad T^6 = (V_5 \ V_6 \ V_7 \ V_8 \ V_3 \ V_2 \ V_1 \ V_4).$$

Apabila titik Ball $D^n, n = 1, 2, \dots, 6$ diperoleh, permukaan akan dijana secara muka demi muka. Bentuk permukaan yang dijana boleh berubah jika nilai parameter bebas diubah tanpa perlu mengubah bentuk poligon kawalan. Nilai-nilai parameter bebas yang digunakan diperoleh melalui prosedur *fminimax* dalam Matlab 6.5.

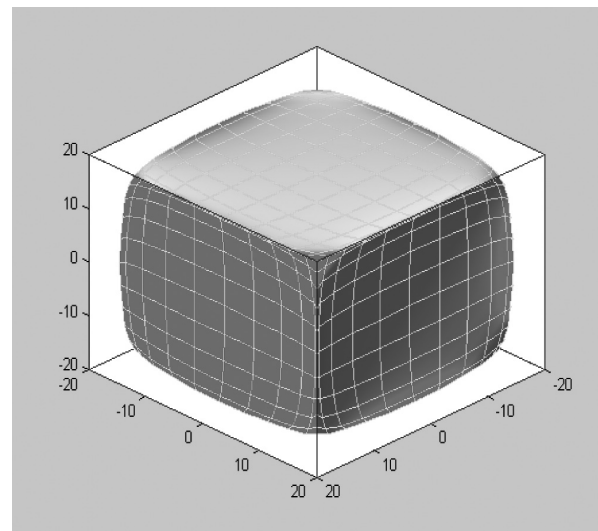
Rajah 4 hingga 7 masing-masingnya mempamerkan bentuk permukaan tertutup bikubik Ball dengan nilai parameter bebas yang berbeza. Rajah 8 dan 9 pula diperoleh, masing-masingnya dengan poligon kawalan yang berbeza daripada poligon kawalan untuk Rajah 6 dan 7.

KESIMPULAN

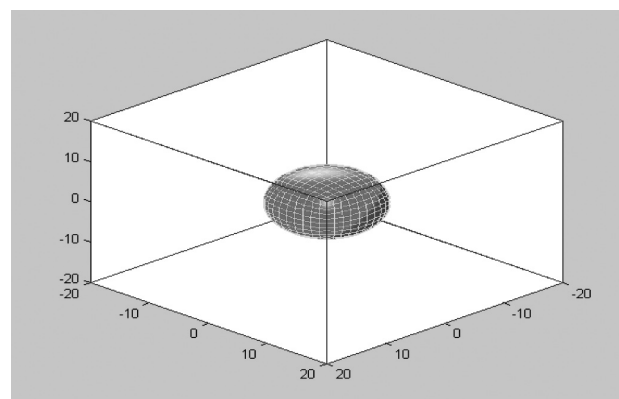
Makalah ini mengemukakan kaedah penjana permukaan tertutup mudah yang genusnya adalah sifar dengan penumpuan diberikan kepada kes pembinaan permukaan bikubik Ball, dengan fungsi pengadun yang ditakrif sekitar bucu-bucu kubus. Contoh-contoh yang dikemukakan



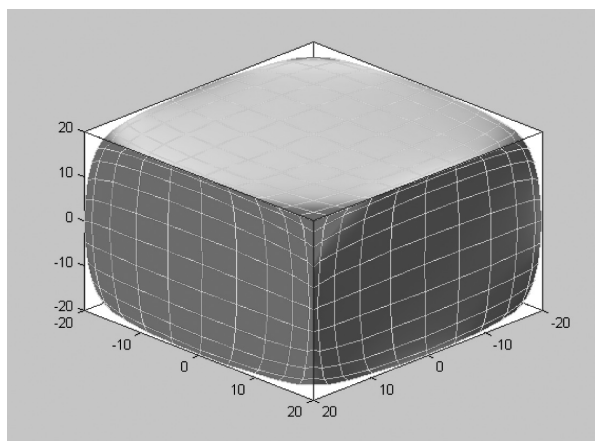
RAJAH 4. Permukaan bikubik Ball dengan parameter bebas $a = 0.76561, g = 0.01008, h = 0.002, i = 0.0179, f = 0.051$



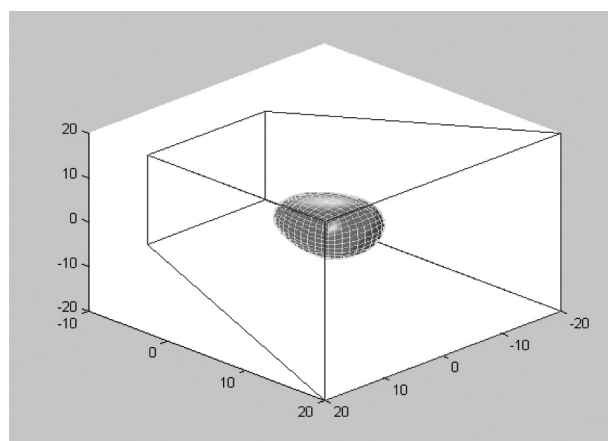
RAJAH 5. Permukaan bikubik Ball dengan parameter bebas $a = 0.6808, g = 0.0801, h = 0.0518, i = 0.0051, f = 0$



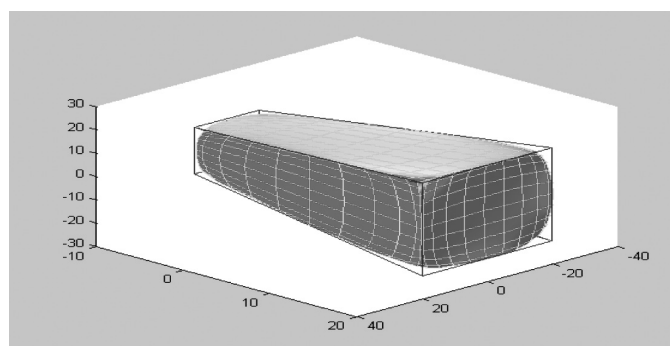
RAJAH 6. Permukaan bikubik Ball dengan parameter bebas $a = 0.2538017, g = 0.07015, h = 0.07015, i = 0.02015, f = 0.0739$



RAJAH 7. Permukaan bikubik Ball dengan parameter bebas $a = 0.8779$, $g = 0.0318$, $h = 0.0201$, $i = 0.0179$, $f = 0.02105$



RAJAH 8. Permukaan bikubik Ball dengan parameter bebas sama seperti dalam Rajah 6 tetapi berlainan poligon kawalan



RAJAH 9. Permukaan bikubik Ball dengan parameter bebas sama seperti dalam Rajah 7 tetapi berlainan poligon kawalan

mempamerkan permukaan yang dibentuk secara cebis demi cebis menggunakan poligon kawalan dan lima parameter bebas terpilih.

PENGHARGAAN

Pengarang merakamkan penghargaan kepada Kementerian Pengajian Tinggi Malaysia dan Universiti Sains Malaysia kerana membiayai penyelidikan ini melalui geran FRGS 203/PMATHS/671040.

RUJUKAN

- Ball, A.A. 1974. CONSURF, Part 1: Introduction of the conic lofting tile. *Computer-Aided Design* 6(4): 243-249.
- Ball, A.A. 1975. CONSURF, Part 2: Description of the algorithms. *Computer-Aided Design* 7(4): 237-242.
- Ball, A.A. 1977. CONSURF, Part 3: How the program is used. *Computer-Aided Design* 9(1): 9-12.
- Goodman, T.N.T. 1991. Closed surfaces defined from biquadratic splines. *Constructive Approximation* 7: 149-160.
- Goodman, T.N.T. & Said, H.B. 1991a. Properties of generalized Ball curves and surfaces. *Computer-Aided Design* 23(8): 554-560.
- Goodman, T.N.T. & Said, H.B. 1991b. Shape preserving properties of the generalized Ball basis. *Computer Aided Geometric Design* 8(2): 115-121.
- Piah, A.R.M. & Saaban, A. 1999. Penjanaan permukaan splin-B teritlak yang tertakrif pada kubus dan tetrahedron dengan menggunakan Mathematica. *Prosiding Kolokium Kebangsaan*, 27-28 Mei pp. 1-6.
- Said, H.B. 1989. A generalized Ball curve and its recursive algorithm. *ACM Trans. Graphics* 8(4): 360-371.
- Said, H.B. 1990. The Bézier-Ball type cubic curves and surfaces. *Sains Malaysiana* 19 (4): 85-95.
- Wang, G.J. 1987. Ball curve of high degree and its geometric properties. *Applied Mathematics: A Journal of Chinese Universities* 2(1): 126-140.
- Diana Sirmayunie Mohd Nasir
Bahagian Hal Ehwal Akademik
Universiti Teknologi Mara Cawangan Perlis
02600 Arau, Perlis, Malaysia
- Abd Rahni Mt Piah*
Pusat Pengajian Sains Matematik
Universiti Sains Malaysia
11800 USM Pulau Pinang, Malaysia
- *Pengarang untuk surat-menyurat; email: arahni@cs.usm.my
- Diserahkan: 25 Ogos 2009
Diterima: 12 November 2009